CH1 : Les espaces réels

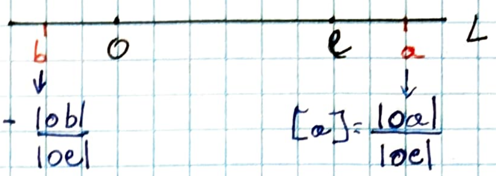
1.1. Le plan réel

1.1.1 La ligne réelle

O : origine

(O, e) : système de référence

$|O, e| = 1$; $e|Oe| = 2$



1.1.2 Les points dans le plan et les couples de nombres réels

Considérons un plan α, où 3 points non-colinéaires O, e_1, e_2 sont tq :
- O : origine
- (O, e_1, e_2) : système de référence.
- $[P]_{(O, e_1, e_2)} = (p_1, p_2)$ sont les coordonnées de P.

→ Il y a donc une bijection entre l'ensemble P des points du plan et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de $\mathbb{R}$

$p \rightarrow [p] \leftarrow [-] : P = \{\text{points du plan } \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

1.1.3 Les points dans le plan et les vecteurs

Considérons l'ensemble $P \times P$ des couples de pt du plan.

$$P \times P = \{(p, q) \mid p \text{ et } q \in \text{plan}\}$$

→ (p, q) et (r, s) sont équipollents ⟺ pqrs sont les sommets d'un parallélogramme tq. p et s sont les sommet opposés.

↳ si pqrs sont colinéaires, (p, q) et (r, s) seront equipollents ⟺ $|pq| = |rs|$ et $|pr| = |qs|$

→ Equipollence = relation d'équivalence ?

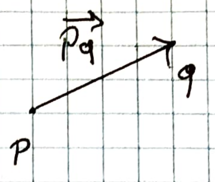
① reflexivité : ∀ couple (p, q) est equipollent avec lui-même.

② symétrie : Si (p, q) est equipollent avec (r, s), alors (r, s) est equipollent avec (p, q).

③ transitivité : Si (p, q) est equipollent avec (r, s), et (r, s) avec (t, u), alors (p, q) est equipollent avec (t, u).

↳ oui ! → Considérons l'ensemble quotient : $P \times P / R$

→ Appelons classe d'eq. par rapport à cette rel. d'eq. un vecteur (libre), notée $\overrightarrow{pq}$



↳ déterminé par sa norme, sa direction et son sens.

→ Fixons un point o dans le plan. Le vecteur $\overrightarrow{op}$ est un vecteur lié avec un point d'application en o. $\overrightarrow{op} = \vec{p}$

↳ En fixant un point o, nous obtenons une relation biunivoque entre les points du plan et les vecteurs.

1.1.4 Addition et multiplication scalaire

Considerons l'ensemble $\mathbb{R}^2$. $\forall\ (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\forall\ r \in \mathbb{R}$, nous définissons

① L'addition : $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in \mathbb{R}^2$

② La multiplication scalaire : $r.(x,y) = (rx, ry) \in \mathbb{R}^2$

⊙ Propositions

1.1 $-\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qp}$

1.2 $\vec{o} + \vec{p} = \vec{p} = \vec{p} + \vec{o}$

1.3 $(\vec{p}+\vec{q})+\vec{r} = \vec{p} + (\vec{q}+\vec{r})$

1.4 $\vec{p} + (-\vec{q}) = \vec{o} = (-\vec{p}) + \vec{p}$

1.5 $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$

1.6 $r(s.\vec{p}) = rs.\vec{p}$

1.7 $1.\vec{p} = \vec{p}$

1.8 $(r+s)\vec{p} = r\vec{p} + s\vec{p}$

1.9 $r(\vec{p}+\vec{q}) = r\vec{p} + r\vec{q}$

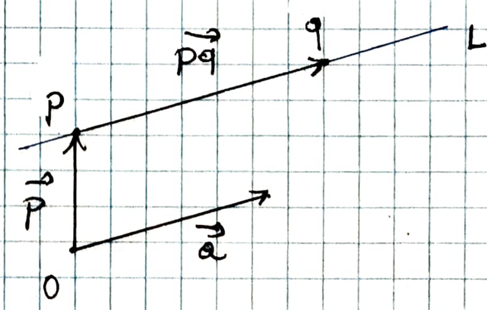
1.10 $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$

1.12 $|\overrightarrow{pq}| = (q_1 - p_1 ; q_2 - p_2)$

1.13 $\vec{p} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2}$: $\vec{p}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

1.1.5 Equation de droites

- $\overrightarrow{pq}$ est un vecteur directeur de la droite L



- Si $\vec{a}$ est un vect. dir., alors $\vec{p} + \vec{a}$ est un point de L.

- Soient $[p] = (p_1, p_2)$ $[q] = (q_1, q_2)$

Nous cherchons $[v] = (x,y)$ qui se trouve sur L.

v se trouve sur L $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{pv} = t.\overrightarrow{pq}$

↳ Comme $\vec{pv} = \vec{v} - \vec{p}$; $\vec{r} = \vec{p} + t\,\vec{pq}$

- Ceci est l'équation vectorielle de la droite L

$$\vec{v} = \vec{p} + t\,\vec{pq} \qquad = \vec{p} + t\,\underbrace{\vec{r}}_{\text{vecteur directeur}}$$

ou : $\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{array}\right\}$ équation paramétrique de la droite L

- Notons $\vec{a} = \vec{pq} = (a_1, a_2)$, alors $a_i = q_i - p_i$ $(i = 1, 2)$ et donc

$$\begin{cases} x = p_1 + t a_1 \\ y = p_2 + t a_2 \end{cases}$$

Supposons que $q_1 - p_1 \neq 0 \neq q_2 - p_2$, nous trouvons

$$t = \boxed{\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}}$$ = équation cartésienne ou statique

↳ Si $p_1 = q_1$, alors $y = p_1$

↳ Si $p_2 = q_2$, alors $y = p_2$

$r_2(x - p_1) = r_1(y - p_2)$ = eq. cartésienne

- L'équation $ax + by + c = 0$ = eq linéaire de la droite L

avec $a, b, c, t \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$

→ Si $c = 0$, l'équation est linéaire homogène

DEMO : → $\vec{r}$ est vecteur directeur de $L \Leftrightarrow \vec{r}$ satisfait $ax + by = 0$

① $\vec{r} = \vec{pq}$ avec $p, q \in L$ et $[p] = (p_1, p_2)$ et $[q] = (q_1, q_2)$

Donc $\vec{r} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$

② $ar_1 + br_2 = 0 \Leftrightarrow a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2)$

$\Leftrightarrow aq_1 - ap_1 + bq_2 - bp_2 = aq_1 + bq_2 - (ap_1 + bp_2)$

?? $= c - c = 0$

③ Similairement, $\vec{p} + \vec{r} \in L$.

?! Donc $\vec{r} = \vec{p} - (\vec{p} + \vec{r}) \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}$ ▨

Corollaire :

- Deux droite $L_1 = pq$ et $L_2 = rs$ sont parallèles

$\Leftrightarrow \vec{pq} \,//\, \vec{rs}$

$\boxed{\text{DEMO}}$ Considérons $\vec{v} = \vec{ov}$ et $\vec{\omega} = \vec{o\omega}$ des vecteurs directeurs.

Alors L_1 et L_2 sont $//$ $\Leftrightarrow$ o, v, ω sont colinéaire, et donc

$\Leftrightarrow \vec{\omega} = k\,\vec{v}$ ▨

1.1.6 Le plan euclidien et coordonnées cartésienne

⊙ Théorème de Pytagore : Dans un plan Euclidien un Δ est rectangle $\Leftrightarrow$ le carré de la longueur de l'hypoténuse est = à la somme des carrés des longueurs des 2 autres côtés.

$\rightarrow$ $\vec{ab}$ et $\vec{pq}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ les droites ab et pq sont $\perp$.

$\rightarrow$ Supposons que $|oe_1| = |oe_2|$ et $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, alors ce système de coordonnées est orthonormal.

↳ Donc, la longueur de $\vec{p} = (x,y)$ est tel que $|\vec{p}| = \sqrt{x^2+y^2}$

↳ $|\vec{p}|$ est la norme de $\vec{p}$.

⊙ La distance entre p et q, noté $d(p,q)$, avec $[p] = (x,y)$ et $[q] = (x',y')$ est noté : $d(p,q) = |\vec{pq}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

⊙ Deux vecteurs sont $\perp \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ avec $[p] = (x,y)$ et

$\boxed{\text{DEMO}}$ $[q] = (x',y')$. ① si $\vec{p} \perp \vec{q}$, alors $|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 = |\vec{pq}|^2$

C.à.d : $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} = \cancel{x'^2} + \cancel{x^2} - 2xx' + \cancel{y'^2} + \cancel{y^2} - 2yy'$

$\Leftrightarrow \quad 0 = xx' + yy'$ ▨

⊙ Si $ar_1 + br_2 = 0$, alors $(a,b) \perp (r_1, r_2)$. Donc $n(a,b)$ est le vecteur normal de la droite L.

⊙ $\boxed{1}$ Equation d'une droite avec $\vec{n}(a,b)$ et $p(u,v)$:

$$a(x-u) + b(y-v) = 0$$

$\boxed{2}$ Equation d'une droite avec $\vec{d}(-b,a)$ et $p(u,v)$

$\boxed{3}$ Equation d'une droite avec $P(p_1,p_2)$ et $U(u_1,u_2)$

$$(u_2-p_2)(x-p_1) + (p_1-u_1)(y-p_2)$$

avec $p(x_1,y_1)$ et $U(x_2,y_2)$ $\qquad \Delta y(x-x_1) - \Delta x(y-y_1) = 0$

↗

1.1.7 L'angle entre 2 vecteurs

⊙ Définitions : Soient o, a et b trois points du plan. L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est défini comme l'angle entre les droites oa et ob.

⊙ Soient $a\,(a_1, a_2)$ et $b\,(b_1, b_2)$. Alors l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est l'angle unique $\alpha \in [0, \pi]$ qui satisfait :

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

⊙ Le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est défini comme

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

→ Remarquons que $\langle a, a \rangle = |\vec{a}|^2$

1.2. L'espace tridimentionnel réel

1.2.1 Points, vecteurs, triples

Considérons (o, e_1, e_2, e_3) 4 points non coplanaires.

$\forall p \in \mathbb{R}^3$, nous pouvons considérer p_i projection de p sur oe_i

$$[p] = ([P_1](o, e_1), [P_2](o, e_2), [P_3](o, e_3)) \in \mathbb{R}^3$$

- Un vecteur est une classe d'équivalence de flèches entre deux points.

⊙ Considérons un système orthonormal (o, e_1, e_2, e_3). Le produit scalaire est défini pour $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ comme

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

⊙ Le produit vectoriel est défini comme $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) = \vec{c}$

① $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}$ et $\perp \vec{b}$

② $\|\vec{c}\|$ est l'aire du ▱ formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

1.2.2 Equations de plans

Un plan P dans $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ d'une eq. du type : $ax + by + cz + d = 0$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

- Le vecteur (a,b,c) est appelé vecteur normal de P.
- Tout vecteur $(m,n,p) \in \mathbb{R}^3$ tq $\langle (m,n,p),(a,b,c) \rangle = 0$ est appelé un vecteur directeur de P.
- Les vecteurs directeurs satisfont l'eq $ax + bx + cz = 0$ (= plan qui passe par l'origine).
- Si $\vec{p}, \vec{q}$ sont vecteurs directeurs, alors $\vec{p} \wedge \vec{q}$ est normal à Π.

1.18 ⊙ $\exists ! \Pi$ avec $\vec{n} = (a,b,c)$ vecteur normal et $(x_1,y_1,z_1) \in \Pi$ tq :

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

? • $\exists ! \Pi$ avec $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ et P → $\vec{v}$ invariant par translation, donne la "pente" du plan mais pas sa "hauteur".

? • $\exists ! \Pi$ avec $\vec{d_1}$, P et Q

• $\exists ! \Pi$ avec P, Q, R.

1.2.3 Equation de droite

Considérons $2 \Pi \in \mathbb{R}^3$ donnés par

$$\Pi_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\Pi_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

? Alors $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1) = k\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$

⊙. Si $\Pi_1 \not\parallel \Pi_2$, leur intersection est une droite

↳ Il faut donc 2 eq. pour déterminer une droite dans $\mathbb{R}_3$.

↳ Il y a plusieurs vecteurs normaux et qu'un seul vecteur directeur.

⊙ $\exists !$ droite avec $\vec{d} = (a,b,c)$ directeur et passant par $P = (x_1, y_1, z_1)$:

?

$$bc(x-x_1) = ac(y-y_1) = ab(z-z_1)$$

↳ $\exists !$ droite avec $\vec{n_1}, \vec{n_2}$, P

↳ $\exists !$ droite P, Q.

1.3. L'espace $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}_0$, et considérons l'ensemble $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \cdots \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

→ Définissons $\mathbb{R}^n$ comme l'espace n-dimensionnel réel et considérons un n-tuple $(x_1, \dots, x_n)$ comme un point ou un vecteur $\in \mathbb{R}^n$.

→ Addition : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

→ Multiplication scalaire : $r \cdot (x_1, \dots, x_n) = (r x_1, \dots, r x_n)$.

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$.

→ Produit scalaire : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

→ Norme : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

→ Distance : $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

⊙ Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions $(x_1, \dots, x_n)$ d'une equation du type $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d = 0$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ est appelé un hyperplan.

→ Le vecteur $(a_1, \dots, a_n)$ est normal, $\perp$ aux vecteurs directeurs.

→ Deux hyperplans sont $//$ $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs normaux sont dépendants.

⊙ $\exists!$ hyperplan avec $\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$ passant par le point $(p_1, \dots, p_n)$:

$$a_1 (x_1 - p_1) + \dots + a_n (x_n - p_n) = 0$$